Examen-Ec.-Diferenciales.pdf

user_b3M0

Matematicas y Estadistica

1° Grado en Farmacia

Facultad de Farmacia - Campus Álava
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes.

a) $\begin{cases} (3t^2+8tx+x^2)x' = 4x^2 - tx, \\ x(0) = 2. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathrm{e}^t + \left(\mathrm{e}^t \cot(x) - x^2 \operatorname{cosec}(x)\right) x' = 0, \\ x(0) = \pi. \end{cases}$

Solución (a): Escribiendo

$$x' = \frac{4x^2 - tx}{3t^2+8tx+x^2} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{4x^2 - tx}{3t^2+8tx+x^2} = F(t,x)$$

la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio $x = tu$, como

$$F(1,u) - u = -\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2+8u+3},$$

la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{u^2+8u+3}{u^3+4u^2+4u}du = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{u^2+8u+3}{u^3+4u^2+4u}du = -\int \frac{dt}{t}.$$

Ahora, como

$$\frac{u^2+8u+3}{u^3+4u^2+4u} = \frac{3/4}{u} + \frac{1/4}{u+2} + \frac{9/2}{(u+2)^2},$$

la igualdad queda en la forma

$$\int \left(\frac{3/4}{u} + \frac{1/4}{u+2} + \frac{9/2}{(u+2)^2}\right) du = -\int \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \left(\frac{3}{u} + \frac{1}{u+2} + \frac{18}{(u+2)^2}\right) du = -\int \frac{4dt}{t}.$$

Integrando

$$3\ln(u) + \ln(u+2) - \frac{18}{u+2} = -4\ln(t) + C \Rightarrow \ln\left(u^3(u+2)t^4\right) - \frac{18}{u+2} = C.$$

Deshaciendo el cambio: $u = x/t$ la igualdad queda

$$\ln\left(x^4 + 2tx^3\right) - \frac{18t}{x+2t} = C.$$

Finalmente, con la condición inicial $x(0) = 2$, obtenemos $C = 4\ln(2)$. Por lo tanto, la solución viene dada por

$$\ln\left(x^4 + 2tx^3\right) - \frac{18t}{x+2t} = 4\ln(2).$$

Solución (b): Vamos a tratar de resolverla como una exacta. Para ello, la reescribimos en la forma

$$\mathrm{e}^t dt + \left(\mathrm{e}^t \cot(x) - x^2 \operatorname{cosec}(x)\right) dx = 0.$$

Observemos que como

$$P = \mathrm{e}^t dt,\ Q = \mathrm{e}^t \cot(x) - x^2 \operatorname{cosec}(x), \qquad P_x = 0,\ Q_t = \mathrm{e}^t \cot(x).$$

Luego, no es exacta. Buscamos un factor integrante. Notemos que

$$\frac{Q_t - P_x}{P} = \cot(x).$$

Luego, existe un factor integrante que depende de x. Este viene dado por la expresión

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \cot(x)dx} = \operatorname{sen}(x).$$

Luego, multiplicando por $\operatorname{sen}(x)$ la ecuación original, obtenemos

$$\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t dt + \left(\mathrm{e}^t \cos(x) - x^2\right) dx = 0,$$

que es exacta, como puede comprobarse.

Ahora, para resolverla, buscamos una función potencial U de manera que

$$U_t = P,\ U_x = Q. \qquad \text{La solución será } U(t,x) = C.$$

Usando, por ejemplo, $U_t = P = \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t$,

$$U = \int P dt = \int \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t dt = \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t + f(x).$$

De otro lado, como $U_x = Q = \mathrm{e}^t \cos(x) - x^2$, derivando con respecto a x en la igualdad, resulta

$$U_x = Q \Leftrightarrow \cos(x)\mathrm{e}^t + f'(x) = \mathrm{e}^t \cos(x) - x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^3}{3}.$$

Sustituyendo en la igualdad, deducimos que la función potencial es

$$U = \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t - \frac{x^3}{3} \Rightarrow \text{La solución general es } \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t - \frac{x^3}{3} = C.$$

Finalmente, con la condición inicial $x(0) = \pi$, resulta $C = -\pi^3/3$. Luego la solución de nuestro problema es

$$\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t - \frac{x^3}{3} = -\frac{\pi^3}{3}.$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.